

Errori nella stima degli incrementi di volume in alberi forestali

Federico Magnani*⁽¹⁾, Sabrina Raddi⁽²⁾

(1) Dipartimento di Scienze Agrarie, Università di Bologna, v. Fanin 46, I-40127 Bologna (Italy); (2) Dipartimento di Gestione Sistemi Agrari, Alimentari e Forestali, Università degli Studi di Firenze, v. San Bonaventura 13, I-50145 Firenze (Italy) - *Corresponding Author: (federico.magnani@unibo.it).

Abstract: *Errors in estimating volume increments of forest trees.* Periodic tree and stand increments are often estimated retrospectively from measurements of diameter and height growth of standing trees, through the application of various simplifications of the general formula for volume increment rates. In particular, the Hellrigl method and its various formulations have been often suggested in Italy. Like other retrospective approaches, the Hellrigl method is affected by a systematic error, resulting from the assumption as a reference term of conditions at one of the extremes of the period considered. The magnitude of the error introduced by different formulations has been assessed in the present study through their application to mensurational and increment measurements from the detailed growth analysis of 107 *Picea abies* trees. Results are compared with those obtained with a new equation, which makes reference to the interval mid-point. The newly proposed method makes it possible to drastically reduce the error in the estimate of periodic tree increments, and especially its systematic component. This appears of particular relevance for stand- and national level applications.

Keywords: Growth, Growth Analysis, Model, Percentage Increment, *Picea abies*

Received: Nov 17, 2013; Accepted: Jan 11, 2014; Published online: Feb 26, 2014

Citation: Magnani F, Raddi S, 2014. Errori nella stima degli incrementi di volume in alberi forestali. *Forest@* 11: 13-19 [online 2014-02-26] URL: <http://www.sisef.it/forest@/contents/?id=efor1182-011>

Introduzione

La stima degli incrementi periodici degli alberi e del bosco costituisce un elemento informativo essenziale per la comprensione delle dinamiche ecologiche e per una corretta gestione forestale. L'analisi delle relazioni esistenti fra accrescimento e parametri ambientali, infatti, può permettere di comprendere quali siano i principali fattori limitanti per la crescita e la fissazione di carbonio degli ecosistemi, e di calibrare e validare strumenti di simulazione. Ancora più rilevante, però, è il ruolo delle stime incrementali nella gestione e nella politica forestale. Una volta estrapolata a livello di intero popolamento, infatti, la stima dei tassi di incremento costituisce un utile indice per la definizione della ripresa sostenibile, e quindi per l'organizzazione della gestione tanto a livello aziendale quanto a scala di intera filiera (ISEA 1986, Bettinger et al. 2009). A scala regionale e nazionale, la stima degli incrementi correnti entra a far

parte di tutti i protocolli per l'inventariazione e il monitoraggio delle risorse forestali (Vidal et al. 2005, Kandler 2006, Gasparini & Tabacchi 2011). Tale stima risulta però molto più laboriosa e incerta di quella della provvigione del bosco; mentre gli incrementi netti devono essere rilevati attraverso inventari successivi su parcelle permanenti (Pretzsch 2009), gli incrementi lordi possono anche essere valutati indirettamente da misure retrospective di crescita radiale (ed eventualmente longitudinale) su un opportuno insieme di alberi campione, tramite la stima dell'incremento percentuale di massa legnosa (Corona 2007); tale metodo è però affetto da svariate fonti di errore, legate non solo all'incertezza nelle misure primarie rilevate, ma anche alle approssimazioni introdotte nei metodi di stima (Hellrigl 1969).

Obiettivo del presente studio è l'analisi degli errori associati ai metodi indiretti comunemente utilizzati in Italia negli inventari forestali nazionali e regionali;

saranno analizzati il metodo combinato esplicito proposto da Hellrigl (1969, 1986), nella modalità a periodo costante così come applicata nell'Inventario Nazionale delle Foreste e dei Serbatoi Forestali di Carbonio per la stima degli incrementi degli alberi campione e del bosco (Gasparini & Tabacchi 2011), e la sua variante applicata nel primo Inventario Forestale Nazionale (MAF 1988). Sarà infine proposto un nuovo approccio volto a minimizzare gli errori sistematici associati alle metodologie attualmente in uso.

Materiali e metodi

Il metodo combinato esplicito

Nella sua formulazione originale, il metodo combinato esplicito (Hellrigl 1969, 1986) si scosta dai metodi di Schneider, di Pressler e di Mayer-Lötsch comunemente applicati in dendrometria (Corona 2007) per il fatto di considerare esplicitamente il contributo all'incremento percentuale di volume derivante dall'accrescimento in altezza. Come negli altri due metodi, vengono trascurate le variazioni con l'età nel coefficiente di forma del fusto. L'incremento periodico di volume del fusto Δv_{12} fra il tempo t_1 e il tempo t_2 viene quindi stimato come (Modello Combinato Esplicito, MCE - eqn. 1):

$$\Delta v_{12} = v_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\Delta d_{12}}{d_2} + \frac{\Delta h_{12}}{h_2} \right)$$

dove v_2 , d_2 e h_2 sono il volume, il diametro a petto d'uomo e l'altezza dell'albero al tempo t_2 , rilevati o stimati dalle misure in bosco, e Δd_{12} e Δh_{12} sono gli incrementi periodici di diametro e di altezza fra il tempo t_1 e il tempo t_2 , rispettivamente. Mentre l'incremento periodico di diametro può essere misurato direttamente su carote legnose estratte dal fusto, l'incremento in altezza è in genere stimato. Nel caso dei due inventari nazionali tale stima deriva dalle curve ipsometriche sviluppate per le singole specie su un ampio campione di alberi modello, una volta noto l'incremento diametrico (MAF 1988, Gasparini & Tabacchi 2011); si sottolinea peraltro come questo metodo di determinazione dell'incremento in altezza tenda a generare valori sempre sottostimati nel caso di soprassuoli coetanei maturi (Marziliano et al. 2012).

Come tutti gli altri metodi retrospettivi, la formula di Hellrigl si basa sul metodo di Eulero per l'integrazione su intervalli finiti di tempo. Considerando il caso di una sola variabile indipendente (diametro o altezza) per ragioni di semplicità, la formula applicata nel metodo di integrazione di Eulero è (Press et al.

1992 - eqn. 2):

$$y_1 = y_2 - \Delta x \cdot f(x_2, y_2)$$

dove y_1 e y_2 sono il valore della variabile dipendente (il volume, nel nostro caso) al tempo t_1 e t_2 , rispettivamente, x_2 è il valore della variabile indipendente (diametro o altezza) al tempo t_2 , Δx è la variazione della variabile indipendente nell'intervallo di tempo tra t_1 e t_2 e f rappresenta la funzione di risposta della variabile dipendente y alla variabile indipendente x , determinata dal valore di entrambe le variabili all'istante t_2 . L'equazione è facilmente estendibile al caso di più variabili indipendenti, applicando il metodo delle derivate parziali (Stroud 1990).

La formula applicata nelle eqn. 1 e 2 è asimmetrica, dal momento che, pur integrando le variazioni sull'intero intervallo da t_2 a t_1 , utilizza per la stima della funzione di risposta f il solo valore delle variabili al termine di questo intervallo. Questo determina un errore significativo della stima; trattandosi di una funzione crescente, come notato da Hellrigl (1986), questo risulta in una sovrastima degli incrementi periodici di volume tanto maggiore quanto più grande è la variazione periodica della variabile indipendente; l'errore sarebbe invece negativo, portando a una sottostima degli incrementi, se venisse adottato il tempo t_1 come istante di riferimento.

Il metodo combinato esplicito è stato applicato in una forma leggermente modificata nell'Inventario Forestale Nazionale (MAF 1988). Il calcolo dell'incremento relativo di diametro e di altezza è stato eseguito rapportando la variazione periodica assoluta al valore medio delle grandezze nel periodo di riferimento, mantenendo però il riferimento al montante al tempo t_2 per il volume (modello IFN - eqn. 3):

$$\Delta v_{12} = v_2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\Delta d_{12}}{d_m} + \frac{\Delta h_{12}}{h_m} \right)$$

dove $d_m = (d_2 - \Delta d_{12}/2)$ e $h_m = (h_2 - \Delta h_{12}/2)$ sono il diametro e l'altezza medi nel periodo di riferimento.

Il metodo combinato esplicito è stato invece applicato nella sua forma originale nell'Inventario Nazionale delle Foreste e dei Serbatoi Forestali di Carbonio (Gasparini & Tabacchi 2011), con l'unico accorgimento di riportare gli incrementi relativi di diametro e altezza ai valori corrispondenti a un anno prima del rilievo inventariale.

Una proposta di modifica al metodo combinato esplicito

L'errore derivante dall'applicazione del metodo

combinato esplicito può essere ridotto attraverso l'applicazione di una procedura analoga al metodo di Runge-Kutta o del punto mediano (Press et al. 1992), comunemente applicato nel calcolo numerico. Il metodo consiste nel calcolare il valore della funzione di risposta f nel punto mediano t_m dell'intervallo temporale considerato $t_m = (t_1 + t_2)/2$, anziché in uno degli estremi. Rispetto al metodo di Eulero, questo risulta in una sostanziale riduzione dell'errore. Essendo però f determinata dal valore delle variabili, il metodo richiede di conoscere il loro valore al tempo t_m .

Nel caso specifico, il metodo consiste nella stima dell'incremento di volume come (eqn. 4):

$$\Delta v_{12} = v_m \cdot \frac{pv}{100} = v_m \cdot \left(2 \cdot \frac{\Delta d_{12}}{d_m} + \frac{\Delta h_{12}}{h_m} \right)$$

dove pv è l'incremento percentuale di volume nel periodo considerato, v_m , d_m ed h_m sono il volume, il diametro e l'altezza dell'albero al tempo mediano t_m . Se gli ultimi due termini possono essere facilmente stimati a partire dalle misure sulle carote estratte dal fusto, il volume al tempo mediano non è noto, essendo pari in prima approssimazione a (eqn. 5):

$$v_m = v_2 - \frac{\Delta v_{12}}{2}$$

Combinando insieme le due precedenti equazioni, l'incremento periodico di volume del singolo albero può essere espresso come (modello combinato modificato, MCM - vedi Appendice 1 - eqn. 6, eqn. 7):

$$\Delta v_{12} = \frac{v_2 \cdot pv}{100 + 0.5 \cdot pv}$$

$$pv = \left(\frac{2 \cdot \Delta d_{12}}{d_2 - 0.5 \cdot \Delta d_{12}} + \frac{\Delta h_{12}}{h_2 - 0.5 \cdot \Delta h_{12}} \right) \cdot 100$$

Validazione dei modelli

L'errore introdotto nella stima dell'incremento periodico di volume dai tre modelli sopra descritti (modello MCE, eqn. 1; modello IFN, eqn. 3; modello MCM, eqn. 6, eqn. 7) è stato valutato attraverso la loro applicazione alle misure di analisi del fusto di von Guttenberg (1915), messe a disposizione dal Prof. Boris Zeide (Zeide 1993, Robinson & Hamann 2010). Il dataset riporta lo sviluppo temporale del volume del fusto di 107 alberi modello di abete rosso (*Picea abies* Karst.) in cinque stazioni delle Alpi, così come stimato per intervalli di 10 anni da analisi del fusto; i dati costituiscono uno standard nell'analisi auxometrica, essendo stati ripetutamente impiegati

per la valutazione di modelli di crescita (Assmann 1970, Sloboda 1970, Zeide 1989, 1993).

Per ogni albero e per ogni intervallo di 10 anni, l'incremento periodico di volume è stato stimato con i tre modelli a partire dalle variazioni di diametro e di altezza rilevate nell'intervallo. La misura delle variazioni di diametro sotto corteccia derivano dalla lettura delle cerchie annuali nell'analisi del fusto, con metodo comparabile alla lettura su carote legnose fatta nei due inventari nazionali. A differenza di quanto fatto nei due inventari, però, si è fatto riferimento all'altezza misurata invece che a quella stimata da curve ipsometriche per la specie, così da valutare l'errore sistematico introdotto dai modelli stessi, in assenza di errori di misura nelle variabili indipendenti.

Analisi statistiche

La bontà della stima di ogni modello è stata espressa in termini della frazione di varianza spiegata (R^2), della radice dell'errore quadratico medio della stima (RMSE) e delle componenti sistematica (MSE_s) e non sistematica (MSE_u) dell'errore quadratico medio della stima (*mean squared error*, MSE - Willmott 1981, Wallach & Goffinet 1989 - eqn. 8, eqn. 9, eqn. 10):

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (y - y_p)^2}{N}}$$

$$MSE_s = \frac{\sum (\hat{y} - y)^2}{N}$$

$$MSE_u = \frac{\sum (y_p - \hat{y})^2}{N}$$

dove y e y_p sono i valori misurati e predetti della variabile dipendente (in questo caso l'accrescimento periodico di volume), N è il numero di osservazioni e \hat{y} è il valore di y_p atteso sulla base della regressione lineare contro i valori osservati ($\hat{y} = a + by$).

Alla luce di un'analisi preliminare delle caratteristiche dei residui dei modelli, l'analisi parametrica è stata inoltre integrata da un'analisi non parametrica per ranghi. Tutte le analisi statistiche sono state condotte utilizzando il programma statistico SAS 8.2 (SAS Institute Inc 1999).

Risultati e discussione

L'ampiezza del dataset di Guttenberg impiegato per la validazione dei tre metodi, in termini di età, dimensioni degli alberi e tassi di crescita (Fig. 1) permette di ritenere che i risultati dell'analisi abbiano

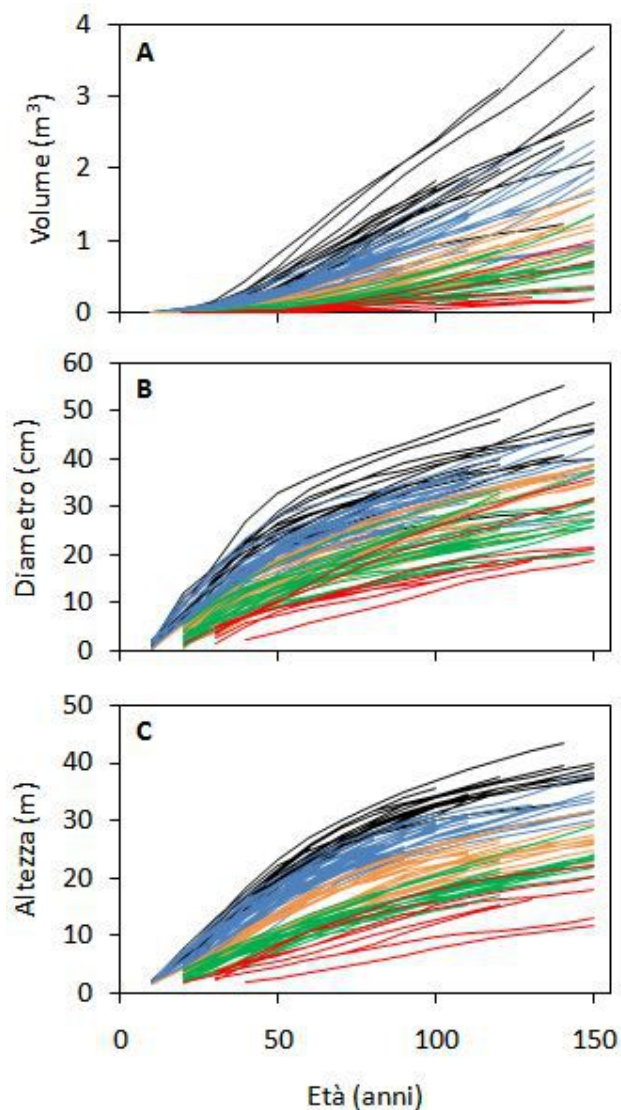


Fig. 1 - Sviluppo con l'età dei parametri dendrometrici nei 107 alberi di *P. abies* utilizzate per la validazione dei tre modelli, così come stimati da analisi del fusto (von Guttenberg 1915). (A) volume del fusto; (B) diametro a 1.30 m; (C) altezza dendrometrica. I colori fanno riferimento a cinque siti caratterizzati da diversa fertilità.

una valenza generale. Il volume dei singoli alberi all'età di 140 anni varia nel dataset fra 0.1 e 3.9 m³, con altezze comprese fra 11.1 e 43.5 m e diametri fra 17.7 e 55.4 cm. Oltre agli effetti di differenze inter-individuali legate alla classe sociale degli alberi, buona parte di questa variabilità è da attribuirsi a differenze di fertilità fra le cinque stazioni campionate (evidenziate con diversi colori in Fig. 1). Gli incrementi diametrici annui sono compresi fra 1.1 e 0.07 cm a⁻¹ e, come atteso, mostrano un forte decremento all'aumentare dell'età dell'albero. I valori di incremento

corrente di volume per albero stimati dall'analisi del fusto vanno da 0.2 a 43.5 dm³ a⁻¹.

Questa ampia variabilità nei tassi di incremento viene ben catturata in prima approssimazione da tutti e tre i metodi proposti (Fig. 2), ma con differenze significative fra l'uno e l'altro. Sulla base di una prima analisi parametrica, la frazione della varianza totale spiegata dai tre modelli è risultata pari al 96% (MCE), 93% (IFN) e 98% (MCM). L'analisi dei residui ha dimostrato peraltro che per tutti e tre i modelli questi non sono distribuiti normalmente (test di Shapiro-Wilk e Kolmogorov-Smirnov), né è rispettata la condizione di omoscedasticità (analisi visiva e test di White); gli errori sono inoltre risultati essere parzialmente auto-correlati (test Durbin-Watson), soprattutto nel caso del modello IFN ($D = 0.89$) e MCE ($D = 1.07$), e in misura nettamente minore nel caso del modello MCM ($D = 1.34$); presumibilmente questo è legato al raggruppamento dei dati per alberi all'interno del *dataset*, e alla ridotta adeguatezza dei primi due modelli nel caso di alcuni alberi in particolare. Non essendo rispettate le condizioni per l'analisi parametrica della correlazione (Zar 2010), è stata pertanto condotta un'analisi non parametrica (correlazione per ranghi di Spearman) che ha confermato i risultati sopra riportati (Tab. 1).

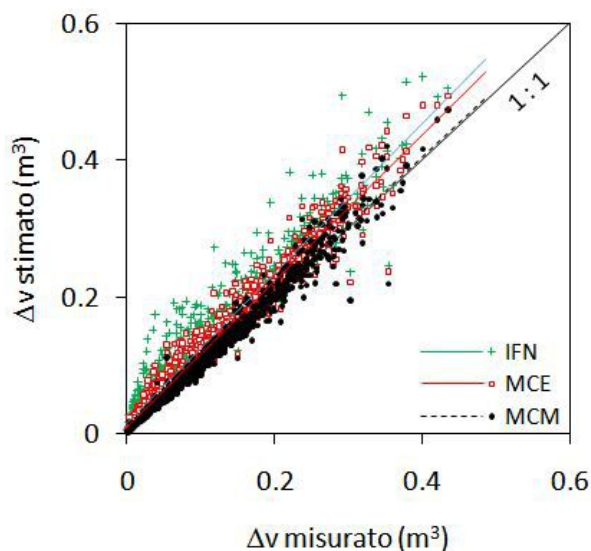


Fig. 2 - Confronto fra l'incremento periodico di volume dell'albero misurato e stimato con i tre metodi discussi nel testo: modello combinato esplicito (MCE, quadrati rossi), il metodo modificato utilizzato nell'Inventario Forestale Nazionale (IFN, croci verdi) e il metodo combinato esplicito modificato (MCM, punti neri). Sono mostrate anche le rette di regressione relative ai singoli modelli e la retta 1:1.

Tab. 1 - Sommario della bontà della stima dell'incremento periodico di volume degli alberi con l'applicazione dei tre metodi descritti nel testo: metodo combinato esplicito (MCE), la variante sviluppata per l'Inventario Forestale Nazionale (IFN), il metodo combinato modificato (MCM) presentato nel presente articolo. Per ogni metodo vengono presentati i valori del coefficiente di correlazione di Pearson (r) e di correlazione per ranghi di Spearman (r_s), l'intercetta (a) e la pendenza (b) della retta di regressione fra incrementi di volume predetti e osservati (Δv predetto = $a + b \Delta v$ osservato) e i relativi livelli di significatività statistica (per $a = 0$, $b = 1$), la radice dell'errore quadratico medio (RMSE; in termini assoluti e come percentuale del valore medio osservato) e le componenti sistematica (MSE_s) e non sistematica (MSE_u) dell'errore quadratico medio.

Parametro	Dimensione	MCE	IFN	MCM
r	-	0.98	0.96	0.99
r_s	-	0.98	0.96	0.99
a	dm ³	8.67***	15.42***	2.28***
b	-	1.07***	1.10***	1.01 ^{ns}
RMSE	dm ³	24.5	37.1	12.8
	%	22.7	37.1	12.8
MSE_s	dm ⁶	303.8	737.5	11.0
MSE_u	dm ⁶	298.4	635.8	154.0

Il metodo IFN sembra comportare i maggiori errori, con deviazioni massime dal valore osservato che arrivano fino a 0.20 m³ per albero nell'arco di un decennio (contro 0.12 e 0.08 m³ per albero nel caso dei metodi MCE e MCM). Come dimostrato dalle rette di regressione, tutti i metodi mostrano un errore tendenzialmente positivo, sovrastimando quindi gli incrementi rispetto ai valori osservati. L'analisi della covarianza dimostra però che questo effetto non è statisticamente significativo nel caso del metodo MCM, mentre la pendenza della retta di regressione è significativamente diversa da uno (sovrastima significativamente positiva) negli altri due modelli (Tab. 1). Tutti i modelli mostrano inoltre un'intercetta maggiore di zero, più marcata nel caso dei modelli MCE e soprattutto IFN. Più marcato appare nel complesso l'errore associato al metodo IFN, applicato nel primo inventario nazionale, a causa del riferimento a due diversi

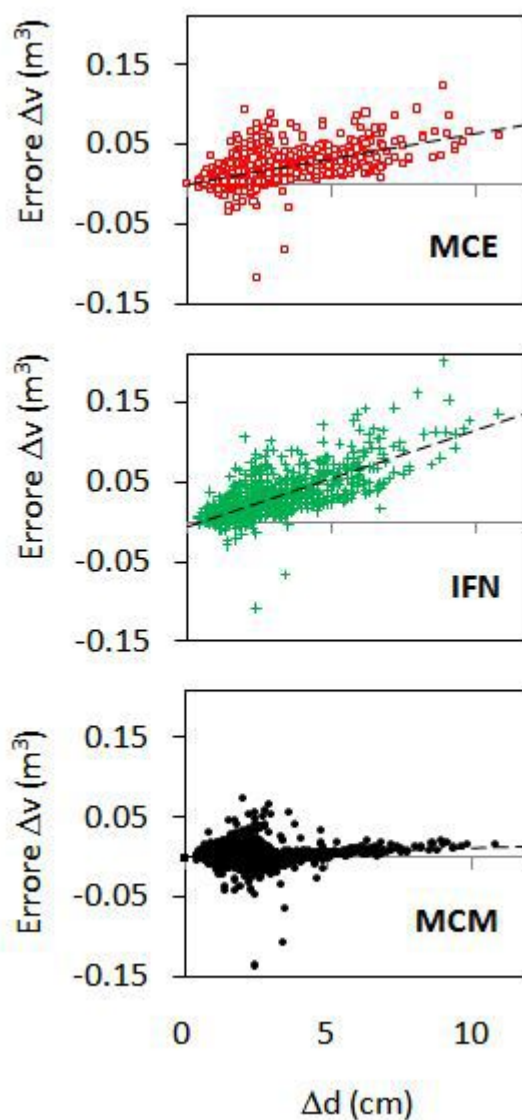


Fig. 3 - Andamento dell'errore nella stima dell'incremento periodico di volume dell'albero (Δv) in funzione dell'incremento periodico di diametro (Δd) con l'applicazione del metodo combinato esplicito (MCE), della variante sviluppata per l'Inventario Forestale Nazionale (IFN) e del metodo combinato modificato (MCM). La linea tratteggiata rappresenta la retta di regressione lineare fra le due variabili.

punti dell'intervallo nel caso delle variabili dipendenti (altezza e diametro) e della variabile indipendente (volume - eqn. 3).

Come atteso su basi teoriche, nei due modelli basati sul metodo di Eulero l'errore nella stima dell'incremento di volume per albero è proporzionale alla variazione periodica delle variabili indipendenti, diametro e altezza (Fig. 3). L'ammontare degli errori e la loro sensitività agli incrementi diametrici periodici sono particolarmente alti nel metodo IFN: oltre all'errore implicito nel metodo di Eulero, infatti, il modello IFN rapporta le variazioni periodiche ai valori di diametro e altezza a metà del periodo (più bassi per definizione) e quindi sovrastima ulteriormente l'incremento percentuale, tanto più quanto maggiore è la distanza fra i due estremi del periodo. L'errore commesso è quindi tanto maggiore quanto più rapido è l'accrescimento diametrico dell'albero (Δd) e sarà quindi particolarmente sensibile in alberi giovani. Sarà inoltre tanto maggiore quanto più lungo è l'intervallo temporale considerato (10 anni nel caso del *dataset* di Guttenberg, 5 anni nel caso dei due inventari nazionali). In termini di errore percentuale la durata del periodo di integrazione avrà una rilevanza inferiore, essendo anche l'incremento di volume proporzionale al numero di anni considerato.

Grazie all'applicazione del metodo del punto mediano, il metodo migliorato MCM risulta invece in errori che sono non solo più contenuti ma anche insensibili all'ammontare degli incrementi.

L'analisi statistica permette di meglio quantificare l'ammontare degli errori commessi con i tre metodi (Tab. 1). In particolare, i valori di RMSE forniscono una stima dell'errore mediamente commesso nella stima dell'incremento nell'arco di 10 anni, che varia fra 13 dm³ per albero nel metodo MCM e 37 dm³ per albero nel caso del metodo IFN; questo è dovuto tanto a un errore non sistematico (eliminabile a scala di soprassuolo o territoriale con l'applicazione a un elevato numero di unità campionarie) quanto a un errore sistematico, come dimostrato dal confronto fra le due componenti (MSE_s e MSE_u) dello scarto quadratico medio. In particolare, il nuovo modello proposto (MCM) permette di ridurre drasticamente la componente sistematica dell'errore (MSE_s), che è pari solo al 6.7% dell'errore complessivo del modello. Questo appare di particolare rilevanza nell'estrapolazione del metodo a scala di soprassuolo e nazionale, dove l'elevata numerosità del campione statistico permette comunque di ridurre gli effetti della sola componente non sistematica dell'errore.

Per quanto detto, risulta raccomandabile applicare il nuovo metodo combinato esplicito modificato (MCM - eqn. 6) nella stima dell'incremento periodico di volume dei singoli alberi, così come nella stima dell'incremento percentuale da estrapolare poi a scala di intero popolamento a scopi inventariali. Resta da capire quale sia stato l'errore introdotto nei passati inventari nazionali dall'impiego dei metodi MCE e IFN per la stima degli incrementi lordi dei boschi italiani e dalla interazione di tali errori con il fatto che l'incremento in altezza non è misurato bensì stimato in base a curve ipsometriche statiche.

Bibliografia

- Assmann E (1970). The principles of forest yield study. Pergamon Press, Oxford, UK, pp. 506.
- Bettinger P, Boston K, Siry JP, Grebner DL (2009). Forest management and planning. Academic Press, San Diego, CA, USA, pp. 331.
- Corona P (2007). Metodi di inventariazione delle masse e degli incrementi legnosi in assestamento forestale. ARACNE Editrice, Roma, pp. 126.
- Gasparini P, Tabacchi G (2011). L'Inventario Nazionale delle Foreste e dei Serbatoi Forestali di Carbonio INFC 2005. Secondo Inventario Forestale Nazionale Italiano. Metodi e Risultati. Edagricole-Il Sole 24 ore, Bologna, pp. 653.
- von Guttenberg AR (1915). Wachstum und Ertrag der Fichte im Hochgebirge. Franz Deuticke, Vienna, pp. 153 + XXI tav.
- Hellrigl B (1969). Sul calcolo dell'incremento percentuale degli alberi in piedi. L'Italia Forestale e Montana 24: 187-191.
- Hellrigl B (1986). Metodologie per la determinazione degli incrementi. In: "ISEA Nuove metodologie nella elaborazione dei piani di assestamento dei boschi". ISEA, Bologna, pp. 584-682.
- ISEA (1986). Nuove metodologie nella elaborazione dei piani di assestamento dei boschi. ISEA, Bologna, pp. 1136.
- Kandler G (2006). The design of the second german national forest inventory. In: Proceedings of the "8th Annual Forest Inventory and Analysis Symposium". Monterey (USA) 16-19 October 2006, pp. 19-24.
- Marziliano PA, Menguzzato G, Scuderi A, Corona P (2012). Simplified methods to inventory the current annual increment of forest standing volume. *iForest* 5: 276-282. - doi: [10.3832/ifor0635-005](https://doi.org/10.3832/ifor0635-005)
- MAF (1988). Inventario Forestale Nazionale 1985. ISAF, Ministero dell'Agricoltura e delle Foreste, Roma, pp. 464.
- Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP (1992). Numerical recipes in FORTRAN. Cambridge Uni-

- versity Press, Cambridge, UK, pp. 963.
- Pretzsch H (2009). *Forest dynamics, growth and yield*. Springer, Berlin, Germany, pp. 664.
- Robinson AP, Hamann JD (2010). *Forest analytics with R*. Springer, New York, USA, pp. 355.
- SAS Institute Inc (1999). *SAS/STAT user's guide, version 8*. SAS Publishing, Cary, NC, USA, pp. 1464.
- Sloboda B (1970). Der QF-Rechner. Ein neues Instrument zur Ermittlung des Flächeninhalts von Stammquerschnitten (zugleich Beitrag zur Theorie der Stammquerschnitte). *Mitteilungen der Baden-Württembergischen Forstlichen Versuchs- und Forschungsanstalt (Heft 24. Abteilung Biometrie, Nr. 3)*, Freiburg im Breisgau, pp. 109.
- Stroud KA (1990). *Further engineering mathematics*. Mac Millan, London, UK, pp. 1140.
- Vidal C, Beloouard T, Hervé JC, Robert N, Wolsack J (2005). A new flexible forest inventory in France. In: *Proceedings of the "7th Annual Forest Inventory and Analysis Symposium"*. Portland (OR, USA) 3-6 October 2005, pp. 67-73.
- Wallach D, Goffinet B (1989). Mean squared error of prediction as a criterion for evaluating and comparing system models. *Ecological Modelling* 44: 299-306. - doi: [10.1016/0304-3800\(89\)90035-5](https://doi.org/10.1016/0304-3800(89)90035-5)
- Willmott CJ (1981). On the validation of models. *Physical Geography* 2: 184-194.
- Zar JH (2010). *Biostatistical analysis*. Prentice Hall, New Jersey, USA, pp. 944.
- Zeide B (1989). Accuracy of equations describing diameter growth. *Canadian Journal of Forest Research* 19: 1283-1286. - doi: [10.1139/x89-195](https://doi.org/10.1139/x89-195)
- Zeide B (1993). Analysis of growth equations. *Forest Science* 39: 594-616.

Materiale Supplementare

Appendice 1 - Sviluppo esplicito del modello combinato modificato (MCM - eqn. 6).

Link: [Magnani_1182@suppl001.pdf](#)